
Identification sous Représentation Diffusive

Introduction à la prise en compte des non-linéarités

L.Laudebat — P.Bidan

* *LGET – Université Paul Sabatier*
118 rte de Narbonne, F-31062 Toulouse cedex 4
lionel.laudebat@lget.ups-tlse.fr

RÉSUMÉ. Ce texte est une introduction à la prise en compte des non-linéarités dans le domaine du génie électrique. En effet, la réalisation diffusive permet une réalisation dynamique en temps permettant d'intégrer lors de la simulation et même pour l'identification des non-linéarités connues à priori.

1. Introduction

Les Opérateurs non rationnels interviennent naturellement dans de nombreux domaines comme l'acoustique, l'électrochimie ou l'étude des matériaux viscoélastiques. Leurs caractéristiques non rationnelles sont dues à la nature répartie des phénomènes internes mise en jeu et les opérateurs mathématiques particulièrement bien adaptés sont les Opérateurs Pseudo-Différentiels (O.P.D.). L'introduction de la réalisation diffusive (R.D.) [MON 98] permet un formalisme adapté à une analyse dynamique du type entrée/sortie d'O.P.D. sous la forme de symbole $\eta(\xi, t)$ (1).

$$H(t, p) = \int_0^{+\infty} \frac{\eta(\xi, t)}{p + \xi} d\xi \quad (1)$$

On peut montrer aisément que $\eta(\xi, t)$ est obtenu par transformée de Laplace inverse de la réponse impulsionnelle $h(t)$ tel que :

$$\eta(t, \xi) \xrightarrow{\mathcal{L}_\xi} h(t, s) \xrightarrow{\mathcal{L}_s} H(t, p) \quad (2)$$

Le symbole $\eta(\xi, t)$ quand il existe, caractérise entièrement l'opérateur et doit être considéré comme le symbole utilisable. La relation entrée-sortie s'exprime sous la forme d'une équation en dimension infinie dite réalisation diffusive (3). La simulation numérique, outre la discrétisation temporelle, nécessite une discrétisation du symbole suivant la variable ξ . Le symbole $\eta(\xi, t)$ est défini sous la forme de

$$\begin{cases} \partial_t \Psi(\xi, t) = -\xi \Psi(\xi, t) + u(t), \Psi(\xi, 0) = 0. \\ y(t) = \int_0^{+\infty} \eta(t, \xi) \Psi(\xi, t) d\xi \end{cases} \quad (3)$$

fonction ou de distribution, la discrétisation et les troncatures (à l'infini) entraîne une approximation du symbole et fournit une relation entrée-sortie discrète de (3) tel que :

$$\begin{cases} \partial_t \Psi_k(t) = -\xi_k \Psi_k(t) + u(t), k=1 \dots N \Psi_k(0) = 0. \\ y(t) = \sum_{k=1}^N \eta_k(t) \Psi_k(t) \end{cases} \quad (4)$$

L'identification du système revient sous représentation diffusive à rechercher le symbole $\hat{\eta}$ qui permet de minimiser la distance euclidienne :

$$\min(\|\underline{\Psi} \hat{\eta} - \underline{y}\|^2) \quad (5)$$

Où $\underline{\Psi}$ est la matrice associée à la réalisation de l'entrée ($\underline{\Psi}$ est calculé a priori à l'aide de l'équation différentielle (4)). Le vecteur solution représentant la discrétisation du symbole est donné par une pseudo-inversion de (5) :

$$\hat{\eta} = [\text{Re}(\underline{\Psi}^* \underline{\Psi})^{-1} \text{Re}(\underline{\Psi}^* \underline{y})] \quad (6)$$

2. Exemples d'application de la réalisation diffusive au Génie Modèle

2.1. Prise en compte de la répartition des temps de relaxation dans les matériaux diélectriques.

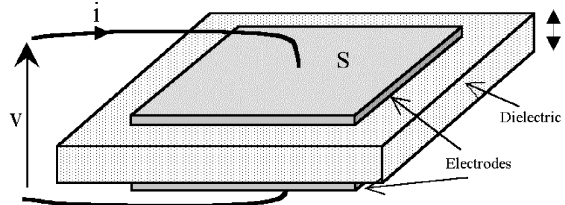


Figure 1 : Condensateur Plan

Le système considéré est un condensateur plan-plan, le diélectrique est homogène, isotrope et linéaire. Le champ électrique E appliqué entre les électrodes est uniforme et les effets de bords sont négligés. Le déplacement électrique D est défini par (7)

$$\vec{D}(t) = \epsilon_0 \vec{E}(t) + \vec{P}(t) \quad (7)$$

La polarisation $P(t)$ peut être décomposée en 2 parties. Une polarisation électronique instantanée (10^{-12} s) et une orientation dipolaire. En s'appuyant sur le modèle de Debye [DEB 29] étendu prenant en compte les interactions entre les dipôles (cas des matériaux solides, liquides et même les milieux gazeux denses), le déplacement

électrique peut être introduit, en prenant en compte une distribution « continue » des temps de relaxation (8) [MAC 87].

$$D(p) = \varepsilon_0 \left[(\varepsilon_\infty + 1) + (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \int_0^{+\infty} \frac{v(\tau)}{1 + \tau p} d\tau \right] E(p) \quad (8)$$

ε_s : Constante diélectrique statique (basses fréquences)

ε_∞ : Permittivité hautes fréquences

$v(\tau)$ représente une fonction de distribution des temps de relaxation normalisée dans le cadre des diélectriques tel que (9) :

$$\int_0^{+\infty} v(\tau) d\tau = 1 \quad (9)$$

On définit alors une permittivité complexe (10).

$$\varepsilon^*(p) = (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \int_0^{+\infty} \frac{v(\tau)}{1 + \tau p} d\tau \quad (10)$$

Tel que :

$$D(p) = \varepsilon_0 ((\varepsilon_\infty + 1) + \varepsilon^*(p)) E(p) \quad (11)$$

Afin de prendre en compte ces interactions entre les différents dipôles, conduisant à une loi de décroissance temporelle du courant en t^{-n} ($n < 0$) plusieurs modèles fractionnaires ont été introduit. Ces modèles empiriques permettaient de traduire le comportement du diélectrique d'un point de vue fréquentiel Tableau 1.

Modèles	Permittivité $\varepsilon^*(p)$
Debye	$\frac{1}{1 + \tau_0 p}$
Cole-Cole	$\frac{1}{(1 + \tau_0 p)^\alpha}$
Cole-Davidson	$\frac{1}{1 + (\tau_0 p)^\beta}$
Hevriak- Negami	$\frac{1}{(1 + (\tau_0 p)^\beta)^\alpha}$

Tableau 1 : Modèles empiriques utilisés pour les diélectriques

Le concept de représentation diffusive a été initialement introduit dans l'optique de transformer des opérateurs fractionnaires, plus généralement des O.P.D., en représentation classique de systèmes dynamiques entrée/sortie. On peut aisément calculer les symboles associés aux différents modèles qui nous permettrons une simulation temporelle facile de ces opérateurs (Figure 2) [LAU 02B]. Dans le cas d'un modèle Cole-Cole le symbole diffusif associé est de la forme (12).

$$\eta(\xi) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \frac{1}{(\frac{\xi}{\xi_0})^\alpha + 2 \cos(\alpha\pi) + (\frac{\xi_0}{\xi})^\alpha} \quad (12)$$

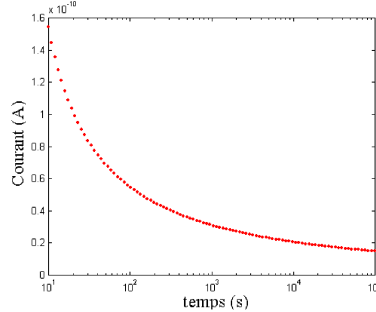


Figure 2 : Réponse temporelle d'une relaxation de type Cole-Cole par Réalisation Diffusive

2.2. compte des courants de Foucault dans un bobinage.

Prenons le cas simple déjà développé dans [BID 00] qui peut être étendu aux cas des machines ou des transformateurs fonctionnant en régime variable.

On considère une plaque mince de fer de forme toroïdale, entourée d'un bobinage (Figure 3).

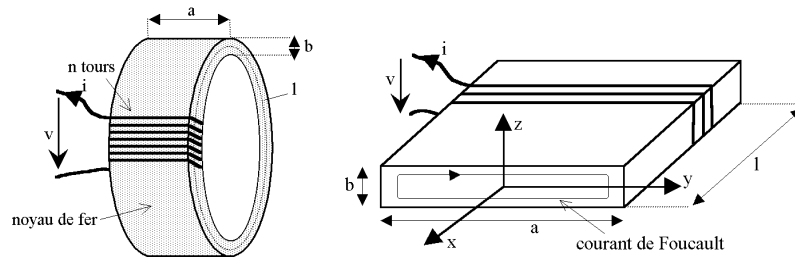


Figure 3. Bobine à noyau de fer mince

La variation de \vec{B} dans le matériau magnétique conducteur entraîne la création de courants induits appelés courants de Foucault. Ces courants induits vont eux même créer une induction magnétique qui va s'opposer à l'induction principale qui leur a donné naissance. A partir des équations de Maxwell, en supposant que la perméabilité μ et la conductivité σ du noyau sont constantes et en négligeant les phénomènes de propagation dans toutes les directions (cadre ARQP, pas de courants de déplacement), le champ d'induction \vec{B} à l'intérieur du tore vérifie l'équation de diffusion $\Delta \vec{B} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$. De part les symétries du système, l'induction est orientée suivant l'axe x . En supposant que $a \gg b$ et en négligeant les fuites à l'extérieur du tore, l'induction est quasi uniforme suivant y . L'induction dans le tore obéit alors à l'équation aux dérivées partielles à une dimension

$$\frac{\partial^2 B(z,t)}{\partial z^2} - \mu \sigma \frac{\partial B(z,t)}{\partial t} = 0, \quad (13)$$

Par transformation de Laplace en temps, (13) et en appliquant le théorème d'Ampère.

L'impédance symbolique embrassant le flux est alors [BID 00]:

$$Z(p) = \frac{v(p)}{i(p)} = L_0 \omega_0 \tanh\left(\sqrt{\frac{p}{\omega_0}}\right) \sqrt{\frac{p}{\omega_0}}. \quad (14)$$

et son admittance :

$$H(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{1}{L_0 \omega_0 \tanh\left(\sqrt{\frac{p}{\omega_0}}\right) \sqrt{\frac{p}{\omega_0}}}. \quad (15)$$

REMARQUE 1. — *Des expressions similaires peuvent être obtenues avec un noyau, toujours sous forme de plaque mince, mais ouvert, en employant l'approximation du solénoïde de longueur infinie.*

L'admittance (15) correspond à la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle $h(t)$ du transfert entrée-sortie causal : tension (v) \rightarrow courant (i), décrit formellement par l'opérateur $H(\frac{d}{dt})$ défini par

$$i(t) = H\left(\frac{d}{dt}\right)v(t) := h(t) * v(t) = \int_0^t h(\tau)v(t-\tau)d\tau, \quad (16)$$

L'opérateur $H(p)$ tend asymptotiquement «aux hautes fréquences» vers un

intégrateur d'ordre $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{L_0 \omega_0} \left[\frac{1}{\omega_0} \frac{d}{dt} \right]^{-\frac{1}{2}}$.

A ce stade, si l'écriture de l'opérateur est très synthétique, le problème de la simulation temporelle de tels transferts demeure entiers. En effet, la voie directe fondée sur le calcul de l'intégrale de convolution est par nature très pénalisante sur le plan de la mémoire (tout le passé du système doit être stocké). Ceci est d'autant plus vrai ici compte tenu des comportements à «mémoire longue» liés à la nature diffusive sous-jacente de l'opérateur explicité par l'intégrateur d'ordre $\frac{1}{2}$.

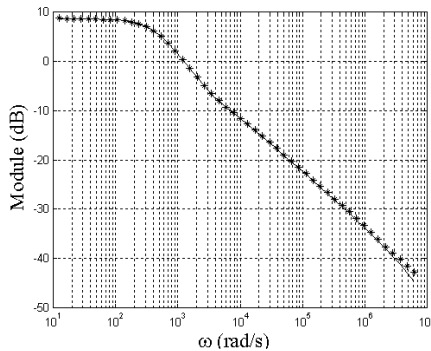


Figure 4 : Module de l'admittance (15)

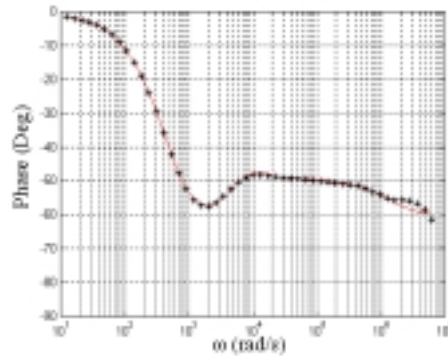


Figure 5 : Phase de l'admittance (15)

Sur la Figure 4 et la Figure 5 nous avons tracé le module et la phase de l'admittance mesurée d'une bobine constituée d'une plaque mince (trait plein). A partir des relevés fréquentiels de l'entrée et ayant défini ξ_k en fonction de la plage fréquentielle. On réalise

l'identification (5) à partir de la sortie mesurée et de la réalisation diffusive de l'entrées Ψ_k . La sortie identifiée est donnée sur la Figure 4 et al Figure 5 par les *. On peut observer une excellente identification malgré quelques oscillations dues à une troncature sur les bords.

Un autre exemple d'identification par réalisation diffusive en génie électrique est le cas du condensateur, où l'identification sera faite sur un relevé temporel.

3. Introduction au traitement des non-linéarités

A partir de la connaissance de la non-linéarité (par des relevés appropriés ou une connaissance physique du phénomène) et du comportement à faibles niveaux ou « petit signal » (pour des petites variations dynamiques, ne mettant pas en jeu le caractère non linéaire), l'objectif est de déterminer le modèle dynamique à « fort signal ».

La dépendance linéaire de la sortie par rapport au symbole diffusif permet une introduction aisée de non-linéarités et aussi une identification optimale du symbole η par filtre de Kalman-Bucy qui n'est pas développée ici [LAU 01]. Les principales non-linéarités rencontrées en génie électrique sont la saturation et l'hystérésis. On retrouve ces non-linéarités aussi bien en magnétique pour des dispositifs contenant un noyau ferromagnétique (transformateurs, machines électriques, ...) que dans les matériaux diélectriques appelés ferroélectriques, tel que de nombreuses céramiques. Citons par exemple le Titanate de Baryum (BaTiO_3) utilisé pour les condensateurs [LAU 99], ou encore l'Oxyde de Zinc (ZnO) procurant leurs caractéristiques non-linéaires aux varistances [BLE 00].

En effet, la forme « diagonale » de la réalisation diffusive (3) permet de conserver la linéarité de la sortie y vis à vis du symbole $\eta(\xi)$, tout en faisant intervenir une non-linéarité entre la réalisation diffusive $\Psi(\xi, t)$ de l'entrée u et ce même symbole. Si $F(\cdot)$ est la fonction représentant cette non-linéarité, on peut écrire :

$$y = \int_0^{+\infty} \eta(\xi, t) F(\Psi(\xi, t)) d\xi \quad (17)$$

On obtient alors la nouvelle équation de sortie :

$$y = \int_0^{+\infty} \eta(\xi, t) \Phi(\xi, t) d\xi \quad (18)$$

La grande difficulté dans cette démarche est la détermination de la non-linéarité et de la justification physique de l'application de la non-linéarité sur la réalisation diffusive de l'entrée $\Psi(\xi, t)$. Pour illustrer ces propos, nous allons présenter succinctement le cas de la bobine à noyau ferromagnétique, moins naturel que le cas des condensateurs ferroélectriques [LAU 02A], et nous verrons les réponses que peut apporter la représentation diffusive en terme de modèle dynamique.

3.1. Notion de nappes de courants de Foucault

Si l'on représente le modèle dynamique d'une bobine, dont le noyau magnétique est supposé non conducteur, sous la forme d'un schéma fonctionnel introduisant la non-linéarité issue de la relation $B(H)$ intrinsèque au matériau utilisé, on aboutit au schéma de la Figure 6 où n correspond au nombre de spires du bobinage, S à la surface et l à la longueur moyenne du matériau magnétique.

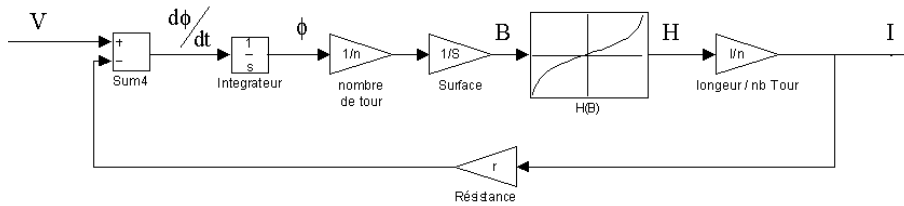


Figure 6 : Schéma Bloc d'une inductance incluant la saturation

Pour prendre en compte l'effet des courants induits (courant de Foucault), on peut introduire la notion de nappes de courant. Dans le cas d'un solénoïde à noyau magnétique cylindrique, que l'on va supposer « infiniment long » (longueur \gg diamètre, Figure 7), on définit des nappes de courants de Foucault concentriques, d'épaisseur identique réparties au sein du noyau. Chaque nappe contribue au champ tel qu'en appliquant le théorème d'Ampère sur le contour l_2 de la nappe I_2 on a (l_2 représente la longueur moyenne supportant la nappe I_2):

$$H_2 \cdot l_2 = I - I_2 \quad (19)$$

Le flux total est la contribution de chaque section tel que pour la section S_2 entre les nappes I_2 et I_3 (S_2 : représente la section efficace supportant B_2):

$$e_2 = r_2 I_2 = \frac{d\phi_2}{dt} = S_2 \frac{dB_2}{dt} + e_3 \quad (20)$$

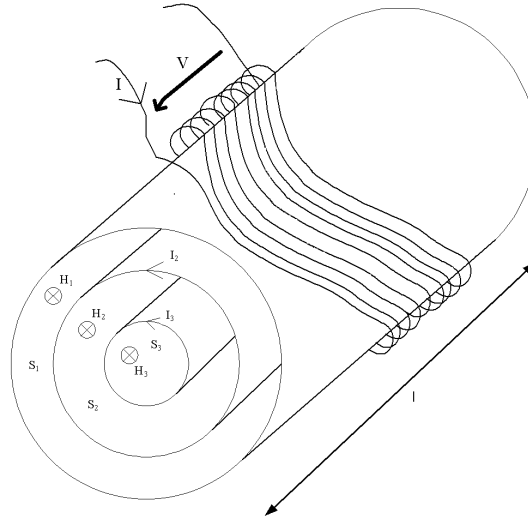


Figure 7 : Schéma du modèle "Nappes de Courant"

Le schéma bloc du modèle « Nappes de courant » est présenté Figure 8. Pour mettre en œuvre en simulation ce modèle, nous avons tout d'abord effectué un premier essai afin de déterminer la caractéristique non linéaire du matériau. Puis nous avons identifié le symbole diffusif à faible signal. Finalement, puis nous avons comparé les réponses de différents modèles entre eux et avec les mesures, lors d'essais « fort signal ».

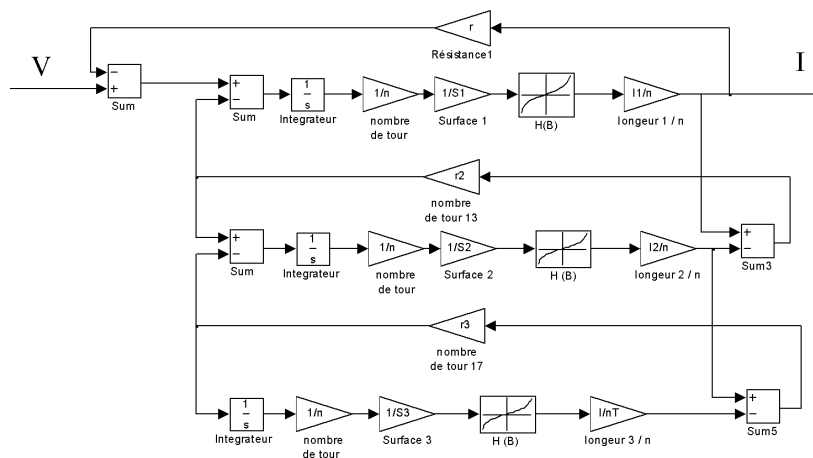


Figure 8 : Schéma Bloc - Nappes de Courant

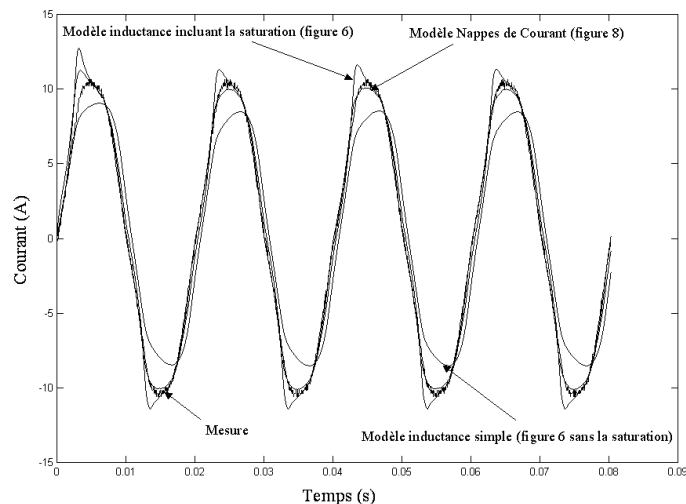


Figure 9 : Application de différents modèles d'inductance

On peut s'apercevoir Figure 9 de la pertinence du modèle « nappes de courant » par rapport au modèle incluant une seule saturation (Figure 6), même à basse fréquence qui sollicite pourtant moins l'aspect courant de Foucault. Le modèle « nappes de courant » Figure 8, conduit en régime linéaire (sans saturation) à un modèle électrique équivalent présenté Figure 10. Un modèle d'impédances imbriquées n'est pas diagonal ne peut pas être représenté directement sous la forme diagonale de la représentation diffusives (3). On peut obtenir la Figure 11 correspondant à la représentation diagonale de la réalisation diffusives, par changement de variable. Ce changement de variable (changement de base) entraîne une perte de la notion physique attribuée au symbole et à la représentation diffusives de l'entrée. A ce niveau là, l'aspect physique est très important afin d'intégrer au mieux la non-linéarité (relation entre le champ magnétique H et l'induction magnétique B dans le cas présent) dans la représentation. En perdant la l'aspect physique sous-jacente au symbole, la non-linéarité associée devient extrêmement difficile à quantifier. La Figure 8 fait intervenir une saturation que l'on peut introduire sur les inductance L_i dans le schéma électrique Figure 10.

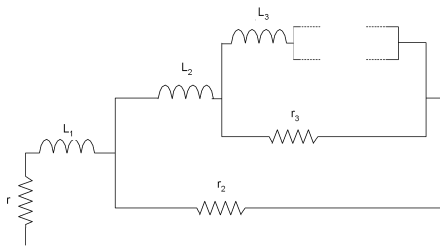


Figure 10 : Schéma Electrique des Nappes Courant en régime linéaire.

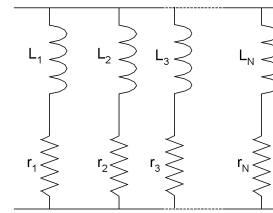


Figure 11 : Schéma Electrique équivalent de la réalisation diffusive « diagonale »

Pour prendre en compte ce type de comportement, il est nécessaire d'introduire une nouvelle représentation diffusive. En effet, la représentation donnée dans (3) est une forme particulière de la réalisation diffusive [MON 01] dont la forme générale issue de l'équation de diffusion est donnée par :

$$\partial_t \varphi(t, x) = \partial_x (\alpha(t, x) \partial_x \varphi(t, x)) + u \delta_x \quad (21)$$

Dans le cas du modèle « nappes de courant », la forme générale issue de l'équation de diffusion est :

$$\partial_t i(t, x) = \frac{r(x)}{L(x)} \partial_x^2 i(t, x) - \frac{v(t, x)}{L(x)r(x)} \partial_x r(x) + u \delta_x \quad (22)$$

Des simplifications possibles de (22) dépendront de la géométrie employée lors de la modélisation. Dans l'exemple traité, le choix de la géométrie est de prendre une épaisseur entre les nappes constante, tel que $r(x) = \text{constant}$. La simulation de cette forme dans le cas général de réalisation diffusive n'a pas encore été finalisée mais les résultats préliminaires sont très encourageants. Cette forme nous permettra de simuler les non-linéarités et même d'identifier le symbole...

4. Références

- [BID 00] P.BIDAN, C.NEACSU, G.MONTSENY, T.LEBEY, «Modèle Pseudo-Différentiel d'une Bobine à Noyau de Fer et Simulation par Réalisation Diffusive», *NUMELEC 2000*, Poitiers, France, 20-22 mars 2000.
- [BLE 00] V.BLEY, «Etude de l'Intégration des Protections en Electronique de Puissance – Utilisation des Varistances à Base d'Oxyde de Zinc.», *Thèse de Doctorat*, Université Paul Sabatier Toulouse III, décembre 2000.
- [DEB 29] P.DEBYE, « Polar Molecules », Chemical Catalogue Company, New York, P.94, 1929.
- [LAU 99] L.LAUDEBAT, «Caractérisation et Utilisation des Condensateurs non-linéaires en Electronique de Puissance.», *Rapport de D.E.A. de Génie Electrique*, Institut National Polytechnique de Toulouse - Université Paul Sabatier Toulouse III, juin 1999.
- [LAU 01] L.LAUDEBAT P.BIDAN, «Quelques Résultats d'Identification et de Poursuite Sous Représentation Diffusive de Modèles Pseudo-Différentiels en Génie Electrique.», *Journées Doctorales d'Automatique 2001*, Toulouse, France, 25-26-27 septembre 2001.
- [LAU 02A] L.LAUDEBAT P.BIDAN, «Identification et poursuite optimales par filtre de Kalman-Bucy du symbole diffusif : Applications aux Diélectriques.», *Journées*

Opérateurs Pseudo-Différentiels et Réalisation Diffusive, Nantes 2002, France, 22-23 mai 2002.

[LAU 02B] L.LAUDEBAT P.BIDAN, G.Montseny « Modeling of Non Rational Electrical Dynamics by Means of Diffusive Representation », Soumis à *IEEE Trans. Circuits & Systems I*.

[MAC 87] J.R. MACDONALD, «Impedance Spectroscopy», A Wiley-interscience Publication John Wiley & Sons, 1987.

[MON 98] G.MONTSENY, «Diffusive representation of pseudo-differential time-operators», *ESAIM: Proc.* vol 5, pp 159-175, décembre 1998,
URL:<http://www.emath.fr/Maths/Proc/Vol.5/index.html>.

[MON 01] G.MONTSENY, J.AUDOUNET, «Représentation Diffusive : Une Introduction», *Journées Doctorales d'Automatique 2001*, Toulouse, France, 25-26-27 septembre 2001.